جامعة [illegible]
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان جبر خطي (2)
الدورة الفصلية الثانية
للعام الدراسي 2016 / 2017

اسم الطالب:
مدة الامتحان:
العلامة:

السؤال الأول: (45 درجة)

ليكن المؤثر الخطي $T : R^3 \rightarrow R^3$ والمعرّف على النحو التالي:

$$T(x, y, z) = (x, y, z) \;\; ; \;\; \forall (x, y, z) \in R^3$$

(1). بيّن ما إذا كان هذا المؤثر قابلٌ للقلب أم لا.

(2). أوجد كثيري الحدود، المميز والأصغري، لهذا المؤثر الخطي.

(3). أوجد القيم الذاتية والأشعة الذاتية الموافقة لها للمؤثر الخطي السابق T.

(4). استنتج من الطلب السابق ما إذا كان هذا المؤثر الخطي قطوراً أم لا.

السؤال الثاني: (25 درجة)

(1). بفرض أنّ A مصفوفة معرّفة فوق الحقل العددي K. برهن أنّ كثير الحدود المميز للمصفوفة A يساوي كثير الحدود المميز لمنقولها.

(2). لتكن المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد مقلوب المصفوفة السابقة A باستخدام نظرية كيلي - هاملتون.

السؤال الثالث: (30 درجة)

بفرض أن $B = \{f_1 \, , \, f_2\}$ قاعدة للفضاء الثنوي $(R^2)^*$ ، حيث أن :

$$f_1 = -x + 3y \;\; , \;\; f_2 = x - 2y$$

(1). أوجد القاعدة $A = \{v_1 \, , \, v_2\}$ للفضاء الشعاعي R^2، والتي B هي قاعدتها الثنوية.

(2). اكتب الشكل الخطي $f = -2x + 3y$ من الفضاء الثنوي $(R^2)^*$ بدلالة أشعة القاعدة B.

(3). اكتب الشعاع $v = (3, -7)$ من R^2 بدلالة أشعة القاعدة A.

2017 /06/ 19

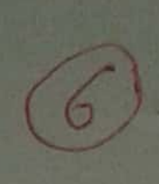
د. غسّان

اسم الطالب:	سلم تصحيح امتحان	جـامعة البـعث
مدة الامتحان: ساعتان	جبر خطي(2)	كليــة العــلوم
العلامـــة: (100)	الدورة الإضافية 2017/2016	قســم الرياضيات

السؤال الأول: (35 درجة)

(i). لنوجد أولاً مصفوفة هذا المؤثر الخطي، وعندها يكون كثيرا الحدود المميز والأصغري للمؤثر الخطي T هما كثيرا الحدود المميز والأصغري لمصفوفة هذا المؤثر.

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0)=(2,1,2) \\ T(0,1,0)=(0,2,0) \\ T(0,0,1)=(0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



إن كثير الحدود المميز لمصفوفة المؤثر الخطي السابقة A هو:

$$\varphi(x)=|xE-A|=(x-2)^3$$

(6)

أما كثير الحدود الأصغري للمصفوفة A فهو أحد الكثيرات الحدود التالي:

$$f_1(x)=(x-2)\ ,\ f_2(x)=(x-2)^2\ ,\ f_3(x)=(x-2)^3$$

$$f_1(A)=(A-2E)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\neq 0$$

(2)

$$f_2(A)=(A-2E)^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2=0$$

(2)

ما يعني أن كثير الحدود الأصغري للمصفوفة A هو:

$$m(x)=(x-2)^2$$

(3)

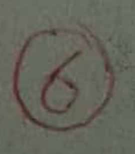
وهو بنفس الوقت كثير الحدود الأصغري للمؤثر الخطي المعطى T.

(ii). من أجل شعاع اختياري $u=(a,b,c)$ من الفضاء الشعاعي الجزئي U نجد أنّ:

$$\begin{aligned} T(a,b,c)&=(2a,a+2b,2c+2a) \\ &=(2a,a+2b,2(a+2b)+2a) \\ &=(2a,a+2b,4a+4b) \end{aligned}$$

(7)

ولأن المركبة الثالثة من $T(a,b,c)$ تساوي المركبة الأولى مضافاً إليها مثلي المركبة الثانية فإنّ $T(a,b,c)\in U$ ، وبالتالي فالفضاء الجزئي U هو فضاء جزئي مستقر بالنسبة للمؤثر الخطي المعطى T .



السؤال الثاني: (35 درجة)

(1). بما أن v شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي T ويقابل القيمة الذاتية λ فيكون:

$$T(v) = \lambda v$$

ويكون أيضاً :

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$$

ولأن $\alpha v \neq \theta$ ، كون $\alpha \neq 0$ و $v \neq \theta$ نستنتج من العلاقة السابقة أن الشعاع αv يكون شعاعاً ذاتياً للمؤثر الخطي T ويقابل القيمة الذاتية λ.

(2). بفرض أن $0 \neq P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ شعاع ذاتي للمصفوفة A ويقابل القيمة الذاتية λ ، فيكون:

$$A.P = \lambda P \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = \lambda x_1 \\ x_2 + 3x_3 = \lambda x_2 \\ 2x_3 = \lambda x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ (1-\lambda)x_2 + 3x_3 = 0 \\ (2-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

ويكون لجملة المعادلات الخطية المتجانسة السابقة حلاً غير الحل الصفري عندما يكون معين الأمثال صفراً، أي :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

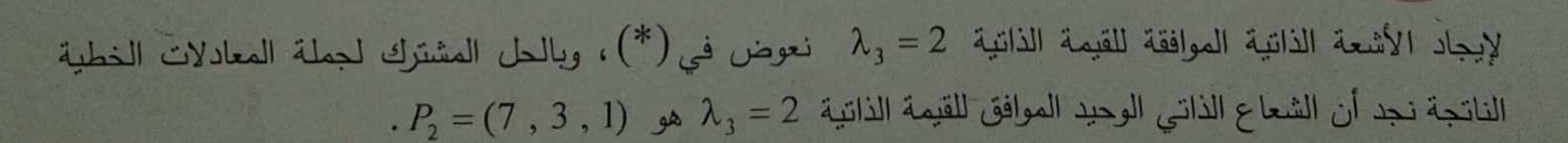
وتكون القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_{1,2} = 1 \ , \ \lambda_3 = 2$.

لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_{1,2} = 1$ نعوض في $(*)$ فنجد :

$$\begin{aligned} 0.x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 0x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نحصل على الشعاع الذاتي الوحيد الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_{1,2} = 1$ وهو:

$$P_1 = (1 \ , \ 0 \ , \ 0)$$



لإيجاد الأشعة الذاتية الموافقة للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 2$ نعوض في $(*)$، وبالحل المشترك لجملة المعادلات الخطية الناتجة نجد أن الشعاع الذاتي الوحيد الموافق للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 2$ هو $P_2 = (7 \ , \ 3 \ , \ 1)$.

السؤال الثالث: (30 درجة)

(1). بفرض أن القاعدة الثنوية A^* للقاعدة $A = \{v_1 = (2,3)\ ,\ v_2 = (3,4)\}$ هي:

$$A^* = \{ f_1(x,y) = a_1 x + b_1 y \quad , \quad f_2(x,y) = a_2 x + b_2 y \quad ; \quad \forall x, y \in R \}$$

فيكون من أجل إيجاد f_1 :

$$f_1(v_1) = 2a_1 + 3b_1 = 1$$
$$f_1(v_2) = 3a_1 + 4b_1 = 0$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$f_1(x,y) = -4x + 3y$$

ومن أجل إيجاد f_2 :

$$f_2(v_1) = 2a_2 + 3b_2 = 0$$
$$f_2(v_2) = 3a_2 + 4b_2 = 1$$

و بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة نجد أن:

$$f_2(x,y) = 3x - 3y$$

وبالتالي تكون القاعدة الثنوية A^* للقاعدة $A = \{v_1 = (2,3)\ ,\ v_2 = (3,4)\}$ هي:

$$A^* = \{ f_1(x,y) = -4x + 3y \quad , \quad f_2(x,y) = 3x - 2y \quad ; \quad \forall x, y \in R \}$$

(2). كتابة الشكل الخطي $f(x,y) = -8x + 4y$ بدلالة أشعة القاعدة A^* :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(v_1).f_1 + f(v_2).f_2 \\ &= (-16 + 12) f_1 + (-24 + 16) f_2 \\ &= -4 f_1 - 8 f_2 \end{aligned}$$

(3). كتابة الشعاع $v = (-12\ ,6)$ بدلالة أشعة القاعدة A .

$$\begin{aligned} v &= f_1(v) v_1 + f_2(v) v_2 \\ &= f_1(-12,6) v_1 + f_2(-12,6) v_2 \\ &= (48 + 18) v_1 + (-36 - 12) v_2 \\ &= 66\, v_1 - 48\, v_2 \end{aligned}$$

د. غسّان نعمه